2.2.2 Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ eines Rotators in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment J

*****

1 Motivation

Dieser Versuch zeigt, dass nicht die Masse, sondern das Trägheitsmoment J die Trägheit bei der Kreisbewegung bestimmt.

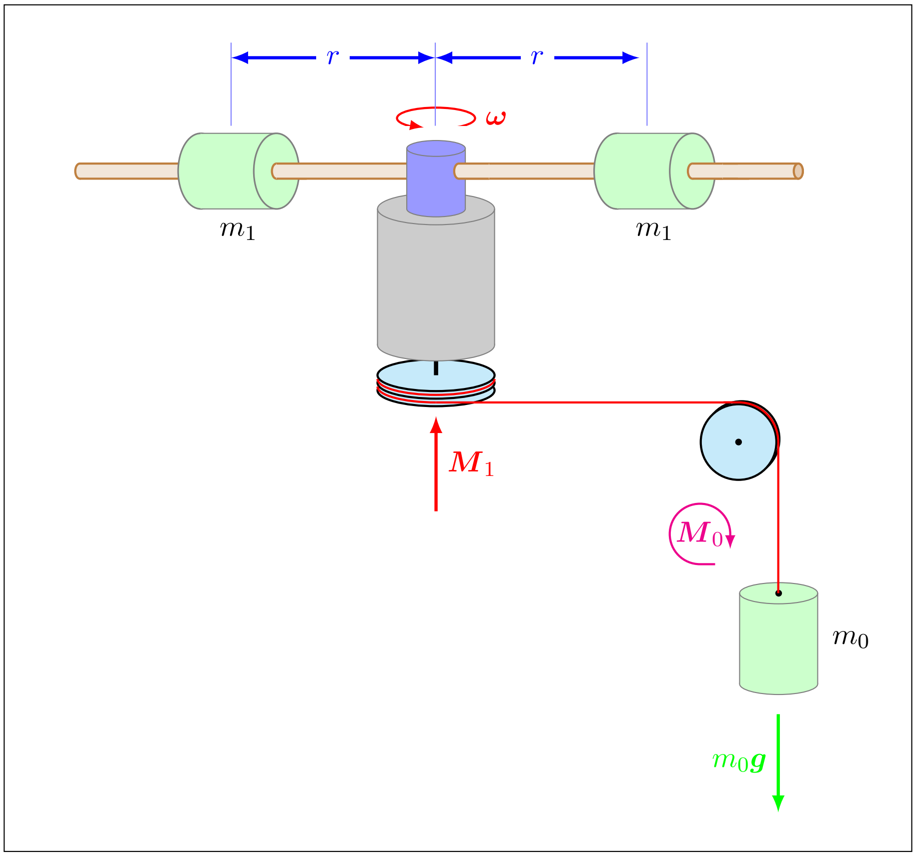

Abbildung 1: Durch Gewicht beschleunigter Rotator.

2 Experiment

Auf einem horizontalen Stab sind zwei gleich grosse Massen m_1 in gleichem Abstand r von der festen Drehachse angebract (siehe Abb. 1). Ein an einem Faden aufgehängtes Gewicht (Masse m_0) erzeugt über ein Rollensystem ein konstantes Drehmomemt M_1 am Rotator und damit eine konstante Winkelbeschleunigung α.

Nun wird in Abhängigkeit vom Abstand r die Zeit Δt gemessen, die zum Abspulen einer definierten Fadenlänge Δs benötigt wird.

Wir nehmen die beiden Massen als punktförmig an. Dann gilt :

$$M_1 = J\ddot{\varphi} \tag{1}$$

$$\text{mit} \quad J = 2m_1 r^2 \tag{2}$$

Sowohl M_1 als auch J sind konstant. Damit ist die Winkelbeschleunigung gegeben durch

$$\ddot{\varphi} = \frac{M_1}{J} := \alpha \tag{3}$$

Die bei der Messung zurückgelegte Strecke entspricht einem fest vorgegebenen Drehwinkel $\Delta\varphi$ des Rotators. Zur Berechnung von Δt integrieren wir die Differentialgleichung (3):

$$\ddot{\varphi} = \alpha \tag{4}$$

$$\dot{\varphi} = \alpha t \tag{5}$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\alpha t^2\,, \tag{6}$$

wobei wir die Anfangswerte $\dot{\varphi}(t = 0) = \varphi(t = 0) = 0$ verwendet haben.

Daraus folgt

$$\Delta\varphi = \tfrac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta\varphi}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2J\Delta\varphi}{M_1}} \tag{8}$$

$$= 2\sqrt{\frac{m_1\Delta\varphi}{M_1}} \cdot r \tag{9}$$

Der Drehimpuls L ist gleich

$$L = J \cdot \dot{\varphi}(\Delta t) := J\omega \tag{10}$$

$$= J\alpha\Delta t = M_1\Delta t \tag{11}$$

$$= 2\sqrt{m_1 M_1 \Delta\varphi} \cdot r \tag{12}$$

und damit ebenfalls proportional zum Abstand r.